

Petit cours de métrologie

Calcul des incertitudes de mesures selon la méthode GUM
(NF ENV 13005 X 07-020)



PLAN

- Introduction à *GUMic* et exemple
- Anciennes approches de l'incertitude
- L'Hypothèse Fondamentale de la Mesure
- Le GUM : convention internationale
- Démarche simplifiée du GUM
- Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage
- Conclusion

Introduction à GUMic et exemple (1)

Que fait GUMic ?

GUMic est un programme qui permet d'exprimer le résultat de mesure avec un intervalle d'incertitude assorti d'un niveau de confiance.

GUMic calcule l'incertitude de mesure selon deux méthodes :

- *La méthode GUM (Guide to the expression of Uncertainty in Measurement) qui est une norme ISO.*
- *La méthode Monte-Carlo qui est une méthode numérique de tirages au sort très puissante.*

Les limites de GUMic

GUMic utilise la méthode GUM limitée à l'ordre 1 (ceci n'est pas vraiment un handicap car le cas des processus fortement non linéaires est très bien traité par la méthode Monte-Carlo).

GUMic ne prend pas en charge le cas des variables aléatoires corrélées.

Introduction à GUMic et exemple (2)

Comment procéder ?

- Remplir les cases jaunes de la feuille de calcul.
- Les cases jaunes qui correspondent à un intitulé de police rouge sont indispensables au calcul.
- Cliquer sur « *Calculer* » et attendre quelques secondes le résultat.
- Pour ajouter une grandeur au tableau cliquer sur « Ajouter Supprimer Ligne » (20 lignes au maximum).

Pratique

- Une aide directe est disponible en plaçant la souris sur l'intitulé de la colonne ou de la ligne.
- Un zoom manuel est possible : **Ctrl + molette** (de la souris)

Exemple de calcul réalisé par GUMic page suivante

Cet exemple sera traité in extenso à la page 21 de cette aide.

Introduction à GUMic et exemple (3)

TITRE

Volume d'eau prélevé par pipetage

Résultat final

$V_e(20^\circ\text{C}) = 9,989 \pm 0,021 \text{ cm}^3$
avec $k = 2,11$

Niveau de confiance : 95 % Exactitude : 0,21 %

1) Définition du mesurande Y

Description

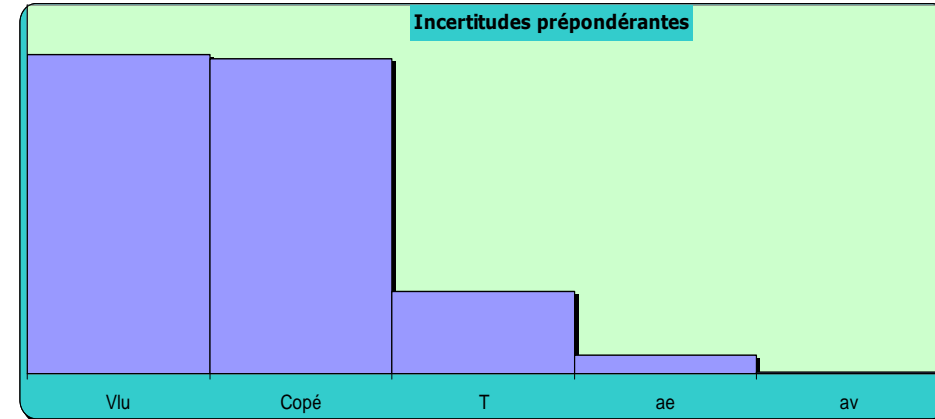
On travaille à 26°C , or le volume qui relie le processus de mesure aux étalons internationaux est le volume de la pipette à 20°C dont la classe nous est garantie par le fabricant.
Donc le volume d'eau que l'on cherche est le volume d'eau prélevé à la pipette ramené à 20°C et il faut donc tenir compte a priori des dilatations thermiques du verre de la pipette et de l'eau que celle-ci contient.

Symbole

$V_e(20^\circ\text{C})$

Unité

cm^3

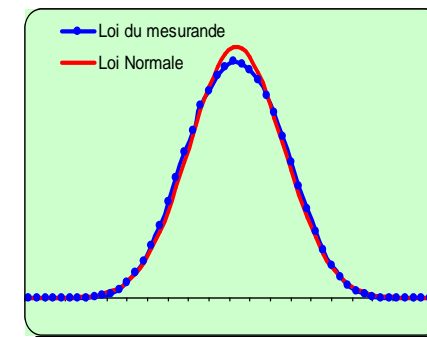


2) Modèle mathématique $Y(X_1, \dots, X_n)$ du processus de mesure

$$V_e(20^\circ\text{C}) = (Vlu + Copé) * [1 + av * (T - 20)] / (1 + ae * (T - 20))$$

MESURANDE	Méthode GUM	Méthode MonteCarlo
Moyenne	9989,21 E-3	9989,21 E-3
Ecart type	9,90 E-3	9,91 E-3
Degrés de liberté		17

Les résultats sont identiques pour les deux méthodes donc le mesurande est quasi linéaire sur son intervalle d'incertitude.
Nombre de degrés de liberté < 30 donc le facteur d'élargissement k suit loi de Student



3) Tableau des grandeurs X_i du modèle

Nom grandeur	Symbole grandeur X_i	Unité	Source incertitude	Loi de probabilité	Moyenne	Demi-étendue U ou a ou écart-type σ ou s(X)	Fiabilité $\Delta u/u$ en % ou taille n ou échappement
Volume lu	Vlu	cm^3	Vérification(classe)	Loi uniforme	10	$a = 0,012$	
Habilité opérateur	Copé	cm^3	Echantillonnage	Répétabilité pour s	0	$s = 0,00685$	$n = 5$
Coef dilatation verre	av	$^\circ\text{C}^{-1}$	Estimation perso	Loi normale 3s	$3,0\text{E}-5$	$U = 0,2\text{E}-5$	$\Delta u/u = 50$
Coef dilatation eau	ae	$^\circ\text{C}^{-1}$	Estimation perso	Loi normale 3s	$2,1\text{E}-4$	$U = 0,2\text{E}-4$	$\Delta u/u = 50$
Temp ambiante	T	$^\circ\text{C}$	Estimation perso	Loi normale 3s	26	$U = 3$	$\Delta u/u = 50$

Incertitude type unité grandeur $u(X_i)$	Coefficient de Sensibilité $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$	Incertitude type unité mesurande $\frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot u(X_i)$	Nombre de degrés de liberté ν_i
$6,93 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	1,00 $(\text{cm}^3) / (\text{cm}^3)$	$6,92 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	infini
$6,85 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	1,00 $(\text{cm}^3) / (\text{cm}^3)$	$6,84 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	4
$6,67 \text{ E-7 } ^\circ\text{C}^{-1}$	59,9 $(\text{cm}^3) / (^\circ\text{C}^{-1})$	$0,04 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	2
$6,67 \text{ E-6 } ^\circ\text{C}^{-1}$	59,9 $(\text{cm}^3) / (^\circ\text{C}^{-1})$	$0,40 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	2
$1,00 ^\circ\text{C}$	$1,80 \text{ E-3 } (\text{cm}^3) / (^\circ\text{C})$	$1,80 \text{ E-3 } \text{cm}^3$	2

Anciennes approches de l'incertitude (1)

Approche universitaire classique de l'incertitude

Méthode de la différentielle (*méthode purement analytique et a priori*)

- $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta x_n$

Inconvénients

- **Majoration irréaliste de l'incertitude** : on envisage le cas le plus défavorable où les erreurs se font toutes dans le même sens.
- **Incertitude non transférable** : Sa démesure la rend inutilisable pour le calcul d'une autre incertitude sous peine d'un effet d'amplification.
- **Confusion Incertitude/Erreur** : sur chaque x_i on estime l'erreur maximale pouvant être commise au lieu de la corriger quand c'est possible.
- **Négligence dans la recherche des causes d'erreurs** :
Le caractère très approximatif de la méthode conduit à faire l'économie d'une étude plus poussée des causes d'erreurs.
Les erreurs non prises en compte placent souvent la « valeur vraie » hors de l'intervalle d'incertitude.
- **Incompatibilité fondamentale entre cette méthode et la méthode statistique** : Impossible de combiner les résultats de ces deux méthodes.

Anciennes approches de l'incertitude (2)

Approche industrielle classique de l'incertitude

Méthodes purement statistiques (méthodes globales a posteriori)

- **Répétabilité** : mesures répétées dans des conditions rigoureusement identiques (mêmes : opérateur, méthode de mesure, instrument, lieu , protocole ...) → **écart type** σ_r
- **Reproductibilité** : Une (ou des) condition(s) de réalisation de la mesure varie(nt) à chaque mesure → **écart type** σ_R
- **Incertitude** :
$$I_g = 2.\sigma = 2.\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_R^2}$$
- **Principe** : L'instrument dont $I_g < IT/4$ est déclaré capable de faire les mesures qu'on lui demande (avec IT l'intervalle de tolérance).
Cela revient à majorer l'incertitude trouvée expérimentalement par la tolérance.

Avantages :

- Méthode rapide, souple et facile à mettre en œuvre.

Inconvénients :

- **Méthode globale** qui ne permet pas d'identifier les grandeurs influentes, donc aucune amélioration possible de l'instrument ou du processus.
- Absence de relation mathématique du type : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Anciennes approches de l'incertitude (3)

Nécessité d'une nouvelle convention

Constat : Incompatibilité des approches traditionnelles de l'industrie et de l'université d'où difficultés de communication.

Qualité nécessaire d'une convention commune :

l'universalité : elle doit pouvoir s'appliquer à tous les types de mesurages et ceci de l'atelier jusqu'au laboratoire de métrologie.

La quantité représentant l'incertitude doit être :

- **calculable de façon logique** à partir des informations recueillies sur le processus de mesure.
- **transférable** : elle doit pouvoir être utilisée comme composante de l'incertitude d'une autre mesure où on utilise le premier résultat.

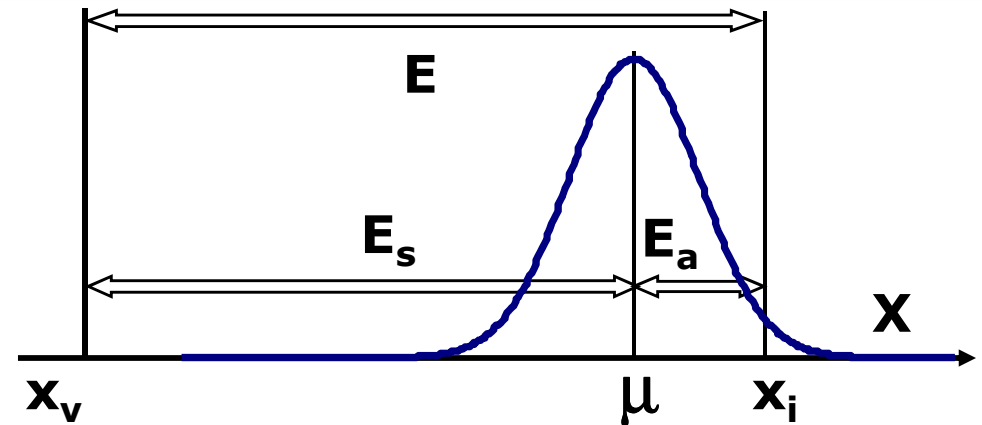
L'Hypothèse Fondamentale de la Mesure (1)

Approche empirique

x_v valeur vraie

x_i résultat brut d'une mesure

μ moyenne d'une infinité de résultats bruts



- Tout résultat de mesure x_i est entaché d'erreur : $E = E_a + E_s$

erreurs aléatoires $E_a = x_i - \mu$ **réduites** par **échantillonnage**

erreurs systématiques $E_s = \mu - x_v$ **réduites** par **corrections**

- Soit X un **résultat corrigé** = résultat dont les erreurs aléatoires et systématiques ont été réduites
- Mais **Réduites** \neq **Éliminées** : des erreurs résiduelles subsistent, inconnues, imprévisibles.

Si on répète plusieurs fois le processus de mesure, on trouve des résultats corrigés dispersés aléatoirement.

L'Hypothèse Fondamentale de la Mesure (2)

L'Hypothèse Fondamentale de la Mesure (HFM)

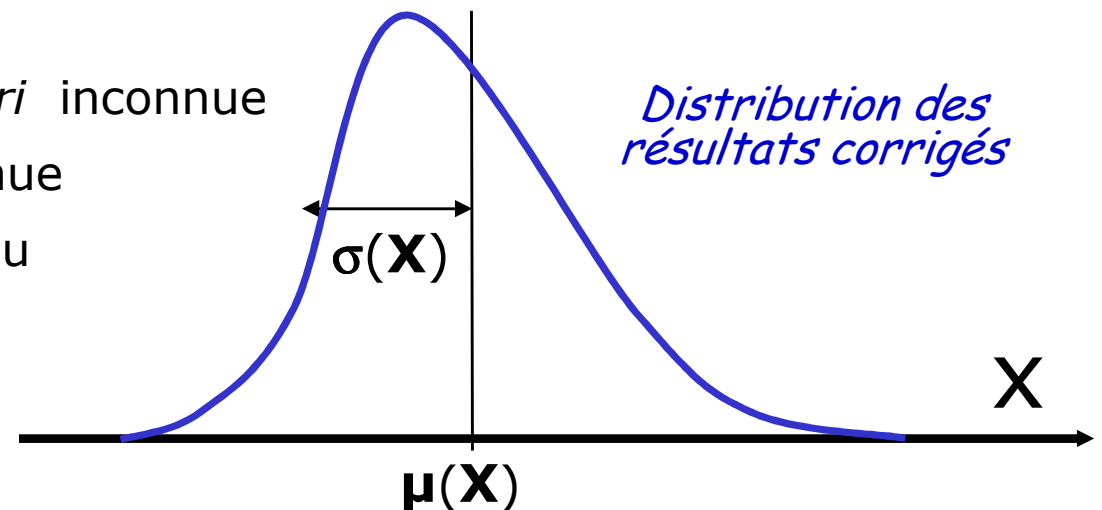
Le résultat de mesure corrigé est une variable aléatoire.

Par commodité on dit que c'est la grandeur elle-même qui est aléatoire, mais ceci est un abus de langage.

La variable aléatoire X « *Résultat corrigé* »

Comme toute variable aléatoire, X présente :

- **Une loi de probabilité** *a priori* inconnue
- **Une moyenne** $\mu(X)$ inconnue
- **Un écart-type** $\sigma(X)$ inconnu



Et la valeur vraie dans tout ça ?

L'Hypothèse Fondamentale de la Mesure (3)

Conséquences de l'HFM

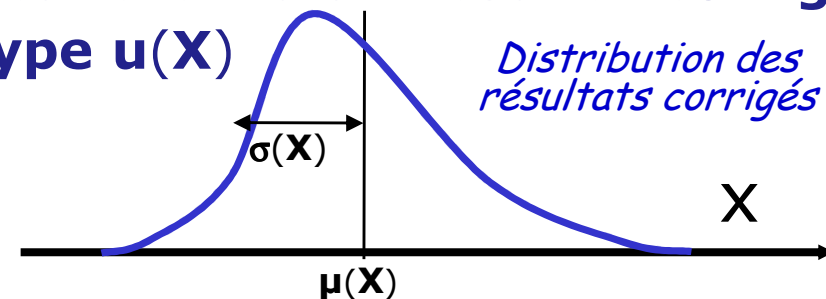
Valeur vraie (d'une grandeur) : Valeur compatible avec la définition d'une grandeur particulière donnée. [VIM 1.19]

Précision du VIM : L'article indéfini " une " plutôt que l'article défini " la " est utilisé en conjonction avec " valeur vraie " parce qu'il peut y avoir plusieurs valeurs correspondant à la définition d'une grandeur particulière donnée.

Incertitude de mesure : Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. [VIM 3.9]

Précision du VIM : Ce paramètre peut être par exemple un écart type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi largeur d'un intervalle de confiance déterminé.

$\mu(\mathbf{X})$ sera **estimée par la valeur particulière x d'un résultat corrigé**
 $\sigma(\mathbf{X})$ sera **estimé par l'incertitude type $u(\mathbf{X})$**



Le GUM : convention internationale

Une norme ISO (*International Standardisation Organisation*)

GUM : **G**uide to the expression of **U**ncertainty in **M**easurement (1993)

Version française : Norme Française X 07- 020 AFNOR Août 1999

Publication reprenant le GUM :

Chimie :

Guide EURACHEM/CITAC :

Quantifier l'Incertitude dans les Mesures Analytiques
(format pdf téléchargeable gratuitement)

<http://www.eurachem.ul.pt/>

<http://www.sach.ch/euchemf.html>

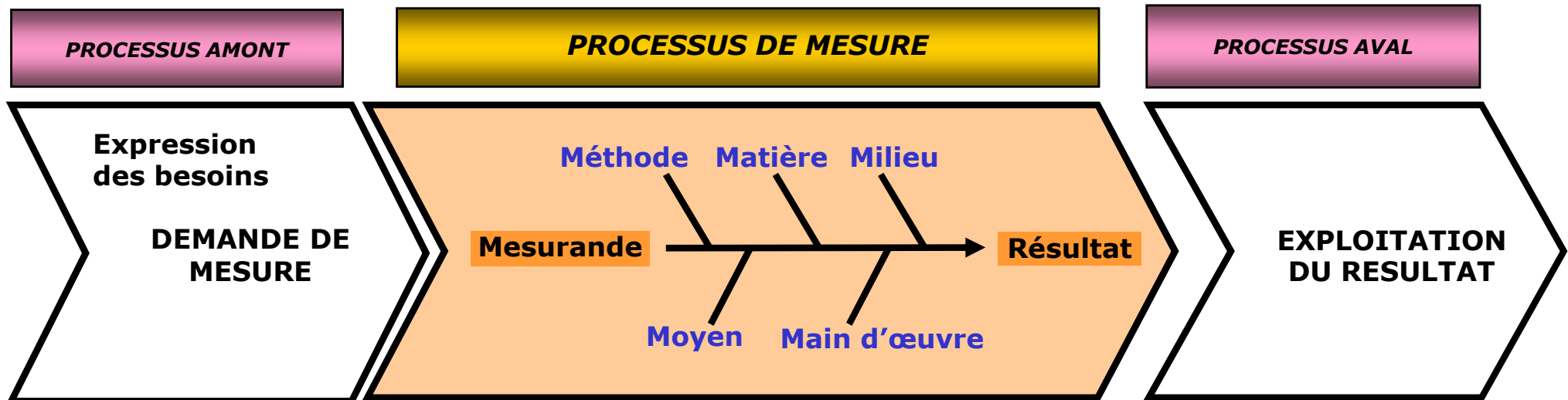


Démarche simplifiée du GUM (1)

1) Analyser le processus de mesure :

Définir le processus de mesure

- Définir le **besoin** : Pourquoi veut-on cette mesure ?
- Définir le **mesurande** : Que mesure t'on ?
- Définir l'**exactitude souhaitée** : Quelles contraintes ? (norme, budget, exactitude ...)
- Définir le **processus de mesure** : Comment procéder vu les points précédents ?



Recenser les sources d'erreurs de mesure affectant le mesurage du mesurande y

Méthode des 5 M : **M**éthode, **M**atière, **M**ilieu, **M**oyen, **M**ain d'œuvre

Démarche simplifiée du GUM (2)

2) Modéliser le processus de mesure de y

Modèle mathématique du processus de mesure : $y = f(x_1, \dots, x_N)$

Mesurande = $f(\text{Constante d'appareil, Dérive, Grandeurs d'influence, Corrections ...})$

- Réduire les erreurs systématiques par des corrections de sorte que l'erreur résiduelle affectant chaque x_i soit purement aléatoire.
- La décision d'ignorer une erreur *a priori* négligeable devrait reposer sur des résultats chiffrés.
- Si une des grandeurs x_i du modèle est nulle surtout ne pas l'éliminer car son incertitude, quant à elle, n'est pas nulle.

Calculer les coefficients de sensibilité de y pour chaque x_i

- Le calcul des $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ sert à l'élaboration des incertitudes.
- Si on connaît l'équation liant y et x_i alors on dérive y par rapport à x_i .
- Si on ignore la forme de l'équation $y(x_i)$ alors on la détermine expérimentalement et on détermine la pente au point de la mesure.

Démarche simplifiée du GUM (3)

3) Estimer $\mu(X_i)$ et $\sigma(X_i)$ des variables aléatoires X_i

La variable aléatoire X_i « Résultat de mesure de la grandeur x_i »

A chaque grandeur x_i du modèle mathématique du processus de mesure $y=f(x_1, \dots, x_n)$ correspond une variable aléatoire X_i { de moyenne $\mu(X_i)$
d'écart type $\sigma(X_i)$

Méthode d'estimation statistique = Méthode A

- Faire de la grandeur x_i un échantillon de taille n
- Estimer $\mu(X_i)$ par la moyenne d'échantillon \bar{x}

Si on veut caractériser la dispersion des valeurs X individuelles :

- Estimer $\sigma(X_i)$ par l'incertitude type $u(x_i) = s(X_i)$ avec $s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

Exemple :

Lors d'un processus de mesure un opérateur ne doit réaliser qu'une seule mesure.

Pour caractériser l'incertitude due à l'opérateur, celui ci réalise à part un échantillon de mesures dont il relève l'écart type expérimental $s(X)$.

Si on veut caractériser la dispersion des moyennes \bar{X} d'échantillon :

- Estimer $\sigma(\bar{X}_i)$ par l'incertitude type $u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$

Démarche simplifiée du GUM (4)

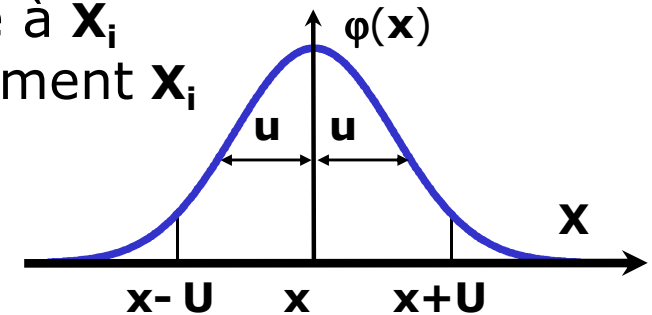
Méthode d'estimation non statistique = Méthode B

- **Estimer $\mu(X_i)$ à partir de :** Certificat d'étalonnage, Constat de vérification, Valeur trouvée dans la littérature, Notice constructeur, Archives de production ...
- **Estimer $\sigma(X_i)$ à partir :**
 - de l'**identification de la loi de probabilité** associée à X_i
 - des **valeurs extrêmes** que peut prendre physiquement X_i

Loi normale

- certificat d'étalonnage COFRAC $k=2$
- estimation personnelle raisonnable $k=3$
- certaines archives de production k

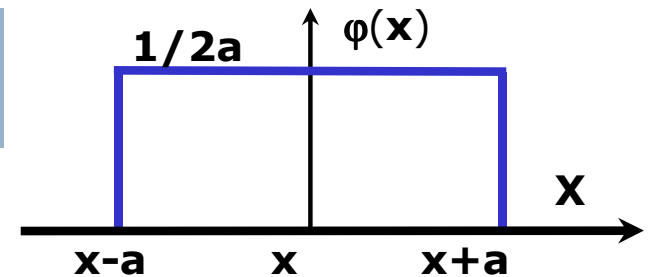
$$u_B(x) = \frac{U}{k}$$



Loi uniforme (= loi rectangle)

- résolution d'un affichage numérique
- constat de vérification (= classe d'exactitude)
- grandeur bornée par deux extrema identifiés.
- phénomène d'hystérésis.
- dérive supposée d'un étalon.

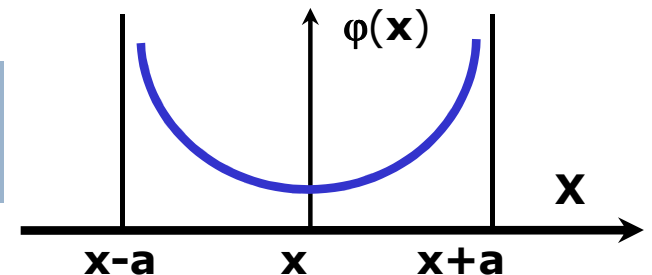
$$u_B(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Loi en U (= loi dérivée d'arcsinus)

- grandeur oscillant entre deux extrema de façon sensiblement sinusoidale.

$$u_B(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



Démarche simplifiée du GUM (5)

4) Quantifier la fiabilité des estimations des $\sigma(X_i)$ par les incertitudes types $u(X_i)$

Certaines incertitudes-types $u(x_i)$ ne sont pas fiables, on leur associe un nombre de degrés de liberté ν_i :

Si $u(x_i)$ est déterminée grâce à un **petit échantillon (taille $n < 30$)**
Dans le cas d'un résultat issu d'une *régression linéaire* on prendra

$$\nu_i = n - 1$$
$$\nu_i = n - 2$$

Si $u(x_i)$ est déterminée à partir d'une **estimation personnelle raisonnable** :

- Estimer $\Delta u / u$ l'incertitude de l'estimation de $\sigma(X_i)$ par $u(x_i)$.
- Calculer le nombre de degrés de liberté associé

$$\nu_i = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\Delta u}{u} \right]^{-2}$$

Ex : On prend souvent $\Delta u / u = 50\%$ dans ce cas : $\nu_i = \frac{1}{2} \cdot (0,5)^{-2} = 2$

Démarche simplifiée du GUM (6)

5) Calculer les estimateurs de $\mu(Y)$ et de $\sigma(Y)$

Le modèle mathématique appliqué aux variables aléatoires est :

$Y=f(X_1, \dots, X_N)$ on peut alors estimer $\mu(Y)$ et $\sigma(Y)$ par y et $u_c(y)$

Avec un développement limité à l'ordre 2 et pour des grandeurs non corrélées :

Estimateur de $\mu(Y)$ $y \approx f(\mu_1, \dots, \mu_N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \cdot u^2(x_i)$

Estimateur de $\sigma(Y)$ $u_c(y) \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 \cdot u^2(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] \cdot u^2(x_i) u^2(x_j)}$

Avec un développement limité à l'ordre 1 et si Y est proche de la linéarité sur un intervalle de l'ordre de 2 à 3 fois l'écart type :

Estimateur de $\mu(Y)$ $y \approx f(\mu_1, \dots, \mu_N)$

Estimateur de $\sigma(Y)$ $u_c(y) \approx \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]^2 \cdot u^2(x_1) + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_N} \right]^2 \cdot u^2(x_N)}$

GUMic utilise ces dernières relations, plus simples.

Quand le mesurande Y est fortement non linéaire *GUMic* utilise les résultats de la méthode de Monte-Carlo qui est insensible à la non linéarité.

Démarche simplifiée du GUM (7)

5) Calculer ν_{eff} le nombre de degrés de liberté effectif

Avant de présenter le résultat final il faut s'assurer de la fiabilité de l'incertitude type composée $u_c(y)$ dans son estimation de $\sigma(Y)$.

$u_c(y)$ peut ne pas être fiable si parmi les incertitudes types prépondérantes qui ont servi à son calcul, on en trouve qui proviennent :

- d'un petit échantillon
- d'une estimation personnelle raisonnable.

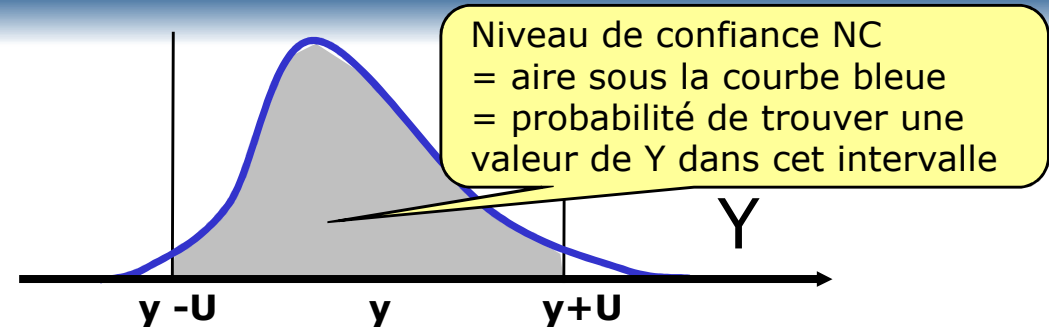
Pour quantifier la "fiabilité" de $u_c(y)$ on calcule le *nombre de degrés de liberté effectif* avec la relation de Welch-Satterhwaite :

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right]^4}{\nu_i}}$$

La valeur de $u_c(y)$ est d'autant plus « fiable » que ν_{eff} est fort.

Démarche simplifiée du GUM (8)

6) Présenter le résultat final



On présente le résultat final sous la forme de base : $Y = y \pm U = y \pm k \cdot u_c(y)$

Quand la loi de probabilité de Y est connue (c'est le cas avec *GUMic*), deux situations peuvent se rencontrer en fonction du nombre de degrés de liberté effectif ν_{eff} :

Pour *GUMic* si $\nu_{\text{eff}} > 30$

Le résultat final s'exprime avec $k=2$

Le **niveau de confiance NC** associé à cet intervalle est alors **déterminé par intégration** de la courbe bleue sur l'intervalle $y \pm 2u(y)$

$$y = y \pm U(y) \\ \text{avec } k = 2 \\ \text{NC} = \dots$$

Pour *GUMic* si $\nu_{\text{eff}} < 30$

Le résultat final s'exprime au niveau de confiance $\text{NC}=95\%$.

Le **facteur d'élargissement k** est majoré pour prendre en compte le manque de fiabilité de l'estimation de $\sigma(Y)$ par $u_c(y)$.

k suit une loi de Student et se détermine pour un NC et un ν_{eff} donnés.

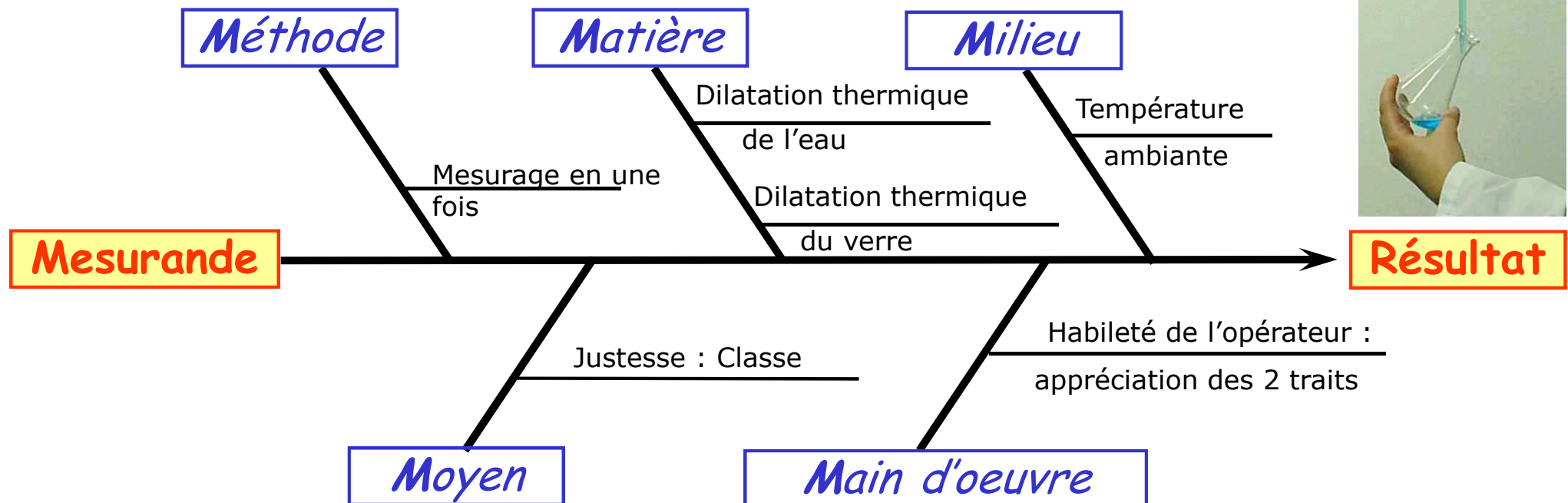
$$y = y \pm U(y) \\ \text{avec } k = \dots \\ \text{NC} = 95 \%$$

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (1)

Cahier des charges de cette mesure

On prélève un volume d'eau avec une pipette à 2 traits
On doit exprimer le volume prélevé avec une incertitude à 2σ selon la norme GUM

Analyse du processus de mesure : Méthode des 5 M



Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (2)

Analyse du processus de mesure (suite)

Informations recueillies :

Résultats obtenus par l'opérateur pour 5 pipetages
dans conditions de répétabilité (pesages)

En cm^3 9,9856 9,9800 9,9964 9,9876 9,9952

Classe d'exactitude de la pipette (indications fabricant)

Volume nominal : $V_u = 10 \text{ cm}^3$

Classe $\pm 0,012 \text{ cm}^3$

Température de référence : $20 \text{ }^\circ\text{C}$

Température du local (= température de l'eau et du verre)

Estimation personnelle raisonnable de l'opérateur : $\theta = 26 \pm 3 \text{ }^\circ\text{C}$

Fiabilité associée à cette estimation : 50% (estimée elle même par le mesureur).

Coefficient de dilatation cubique de l'eau

$\alpha_e = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ valeur trouvée dans la littérature.

Coefficient de dilatation cubique du verre

$\alpha_v = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ valeur trouvée dans la littérature.



Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (3)

Modèle mathématique du processus de mesure :

Modèle mathématique

La seule valeur connue précisément est le volume de la pipette à 20°C.

On recherche donc V_{e20} le volume d'eau prélevé ramené à 20°C

A la température ambiante θ le volume d'eau et le volume de la pipette sont égaux :

$V_{\theta} = V_{lu} \cdot [1 + \alpha_v \cdot (\theta - 20)]$ volume de la pipette à la température θ de pipetage

$V_{\theta} = V_{e20} \cdot [1 + \alpha_e \cdot (\theta - 20)]$ volume de l'eau à la température θ de pipetage

d'où le volume d'eau recherché :
$$V_{e20} = V_{lu} \cdot \frac{1 + \alpha_v \cdot (\theta - 20)}{1 + \alpha_e \cdot (\theta - 20)}$$

Soit $C_{opé}$ la correction sur le volume nominal V_{lu} qui tient compte de l'erreur imprévisible due au réflexe de l'opérateur dans son appréciation des traits.

$$V_{e20} = (V_{lu} + C_{opé}) \cdot \frac{1 + \alpha_v \cdot (\theta - 20)}{1 + \alpha_e \cdot (\theta - 20)} = (10 + 0) \times \frac{1 + 3,0 \cdot 10^{-5} \times (26 - 20)}{1 + 2,1 \cdot 10^{-4} \times (26 - 20)}$$

$V = 9,989214 \text{ cm}^3$

Remarques :

- Pour ce résultat intermédiaire il faut conserver de nombreux chiffres.
- Dans le modèle doivent figurer toutes les corrections même nulles car leurs incertitudes quant à elles ne sont pas nulles.

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (4)

Calcul des coefficients de sensibilité

Linéarisation du modèle mathématique

Afin de simplifier les calculs suivant on cherche si possible à linéariser le modèle.

$$V_{e20} = (V_{lu} + C_{opé}) \cdot \frac{1 + \alpha_v \cdot (\theta - 20)}{1 + \alpha_e \cdot (\theta - 20)} \quad \text{linéarisable en } \mathbf{V_{e20} \approx (V_{lu} + C_{opé}) \cdot [1 + (\alpha_v - \alpha_e) \cdot (\theta - 20)]}$$

Sensibilité de V à chacune des grandeurs du modèle

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial V_{lu}} = [1 + (\alpha_v - \alpha_e) \cdot (\theta - 20)]$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial V_{lu}} \approx 1,00 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial C_{opé}} = [1 + (\alpha_v - \alpha_e) \cdot (\theta - 20)]$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial C_{opé}} \approx 1,00 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial \alpha_v} = (V_{lu} + C_{opé}) \cdot (\theta - 20) \approx (10,0 + 0) \times (26 - 20)$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial \alpha_v} = 60,0 \text{ cm}^3 \cdot (\text{°C}^{-1})^{-1}$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial \alpha_e} = -(V_{lu} + C_{opé}) \cdot (\theta - 20) \approx (10,0 + 0) \times (26 - 20)$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial \alpha_e} = -60,0 \text{ cm}^3 \cdot (\text{°C}^{-1})^{-1}$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial \theta} = (V_{lu} + C_{opé}) \cdot (\alpha_v - \alpha_e) \approx (10,0 + 0) \times (3 - 21) \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\partial V_{e20}}{\partial \theta} = -0,00180 \text{ cm}^3 \cdot \text{°C}^{-1}$$

Remarques :

- On ne simplifie pas les unités d'une sensibilité.
- On garde 3 chiffres significatifs pour les sensibilités (qui n'interviennent que dans le calcul de l'incertitude).

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (5)

Détermination des incertitudes types

$u_{B1}(V_{lu})$: Incertitude type de justesse (méthode non statistique : B)

- Pour un **matériel vérifié** (= appartenant à une classe) on a :
- Loi de probabilité = **loi uniforme**
- Soit a la demie étendue de classe

$$u_{B1}(V_{lu}) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,012}{\sqrt{3}} = \mathbf{0,00693 \text{ cm}^3}$$

$u_{A2}(C_{opé})$: Incertitude type de répétabilité (méthode statistique : A)

- L'habileté de l'expérimentateur peut se quantifier par un écart type.
- ATTENTION : le volume prélevé et utilisé ne l'est qu'une seule et unique fois (=1 mesure) donc ici l'incertitude type est égale à l'écart type expérimental $s(x)$.

$$u_{A2}(C_{opé}) = s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \mathbf{0,00685 \text{ cm}^3}$$

$u_{B3}(\alpha_v)$: Incertitude type coef dilatation verre (méthode non statistique : B)

Ici une **estimation personnelle raisonnable** de U est $U = \mathbf{0,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}$

L'estimation personnelle raisonnable est traditionnellement modélisée par :

- Loi de probabilité = **loi normale**
- Incertitude élargie U donnée à 3σ

$$u_{B3}(\alpha_v) = \frac{a}{3} = \frac{0,2 \cdot 10^{-5}}{3} = \mathbf{6,67 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}$$

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (6)

Détermination des incertitudes types (suite)

$u_{B4}(\alpha_e)$: Incertitude type coef dilatation eau (méthode non statistique : B)

Ici une **estimation personnelle raisonnable** de U est $U = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ °C}^{-1}$

L'estimation personnelle raisonnable est traditionnellement modélisée par :

- Loi de probabilité = **loi normale**
- Incertitude élargie U donnée à 3σ

$$u_{B4}(\alpha_e) = \frac{a}{3} = \frac{0,2 \cdot 10^{-4}}{3} = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$$

$u_{B5}(\theta)$: Incertitude type de température (méthode non statistique : B)

L'**estimation personnelle raisonnable** de U par l'opérateur est $U = 3 \text{ °C}$

- Loi de probabilité = **loi normale**
- Incertitude élargie U donnée à 3σ

$$u_{B5}(\theta) = \frac{a}{3} = \frac{3}{3} = 1,00 \text{ °C}$$

Remarques :

- Pour le calcul on garde 3 chiffres significatifs aux incertitudes types.
- Il ne faut pas abuser des estimations personnelles, mais si on en fait une, la méthode GUM nous dira si on a eu raison.

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (7)

Détermination des incertitudes types (suite)

Incertitudes types en unité du mesurande

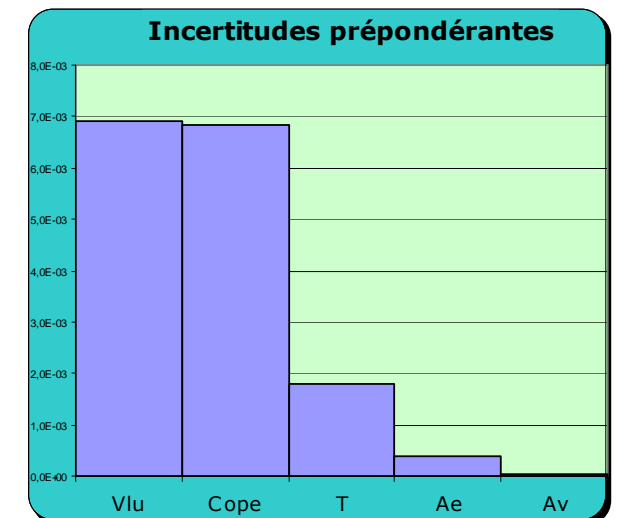
SYMBOLE X_i	SOURCE INCERTITUDE	LOI DE PROBABILITE	MOYENNE	DEMI ETENDUE ou ECART TYPE U ou a ou σ	Incertitude type unité grandeur $u(X_i)$	Coef Sensibilité $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$	Incertitude type unité mesurande $\frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot u(X_i)$
Vlu	Vérification	Uniforme	10,000 ml	0,012 ml	0,00693 ml	1,00 (ml) / (ml)	0,00692 ml
Copé	Habilité opérateur	Echantillon	0,000 ml	0,00685 ml	0,00685 ml	1,00 (ml) / (ml)	0,00685 ml
Av	Coef Dilatation Verre	Loi normale 3s	3,0 E-5 °C-1	0,2 E-5 °C-1	6,67 E-7 °C-1	60,0 (ml) / (°C-1)	0,00004 ml
Av	Coef Dilatation Eau	Loi normale 3s	2,1 E-4 °C-1	0,2 E-4 °C-1	6,67 E-6 °C-1	60,0 (ml) / (°C-1)	0,00040 ml
T	Estimation perso	Loi normale 3s	26 °C	3 °C	1,00 °C	0,00180 (ml) / (°C)	0,00180 ml

Analyse

Les incertitudes limitantes sont celles de la classe de la pipette et de l'habileté de l'opérateur.
Inutile d'essayer améliorer les autres si on ne diminue pas d'abord ces 2 sources principales d'incertitude.
On pourra choisir une pipette de meilleure classe.

Remarque :

Une analyse selon le GUM aide donc à maîtriser le processus de mesure par effet rétroactif.



Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (8)

Calcul de l'incertitude type composée $u_c(V)$

Estimateur de l'écart type de la variable aléatoire V

$$u_c(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V_{e20}}{\partial V_{lu}} \cdot u_{B1}(V_{lu})\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{e20}}{\partial C_{opé}} \cdot u_{A2}(C_{opé})\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{e20}}{\partial \alpha_v} \cdot u_{B3}(\alpha_v)\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{e20}}{\partial \alpha_e} \cdot u_{B4}(\alpha_e)\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{e20}}{\partial \theta} \cdot u_{B5}(\theta)\right)^2}$$

$$u_c(V) = \sqrt{0,00692^2 + 0,00684^2 + 0,00004^2 + 0,00040^2 + 0,00180^2}$$

$$u_c(V) = 0,00990 \text{ cm}^3$$

La question de la « fiabilité » de l'incertitude type composée.

Ce résultat est établi à partir de deux incertitudes-types prépondérantes non fiables :

- $u_{A2}(C_{opé})$ est une estimation faite à partir d'un très petit échantillon (taille $n=5$)
- $u_{B5}(\theta)$ est une estimation personnelle.

Donc on peut supposer que l'incertitude-type composée $u_c(V)$ peut ne pas être fiable.

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (9)

Détermination du nombre de degrés de liberté ν_{eff}

Fiabilité de $u_{A2}(C_{\text{opé}})$

quantifiée par le nombre de degrés de liberté

$$\nu_2 = n-1 = 5 - 1 = 4$$

Fiabilité de $u_{B5}(\theta)$

selon l'énoncé $\Delta u/u = 50\%$

$$\nu_5 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\Delta u}{u} \right]^{-2} = \frac{1}{2} \cdot (0,5)^{-2} = 2$$

Nombre de degrés de liberté effectif

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(V)}{\frac{\left[\frac{\partial V}{\partial C_{\text{opé}}} \cdot u(C_{\text{opé}}) \right]^4}{\nu_2} + \frac{\left[\frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot u(\theta) \right]^4}{\nu_5}} = \frac{0,00990^4}{\frac{0,00685^4}{4} + \frac{0,00180^4}{2}} = 17$$

$\nu_{\text{eff}} < 30$ donc l'incertitude-type composée n'est pas fiable.

Exemple : Volume d'eau prélevé par pipetage (10)

Résultat du mesurage au niveau de confiance 95%

Pour prendre en compte ce manque de « fiabilité », on élargit l'intervalle d'incertitude grâce à un facteur d'élargissement k tiré d'une loi de Student.

Pour un niveau de confiance $NC=95\%$ et un nombre de degrés de liberté $\nu_{\text{eff}} = 17$, *GUMic* (ou une table de Student) donne $k=2,11$

Incertitude élargie : $U = 2,11 \cdot u_c(V) = 2,11 \times 0,00990 = 0,0209 \text{ cm}^3$

Résultat final : $V = V \pm U$

L'incertitude finale ne doit comporter que deux chiffres significatifs.

Le nombre de chiffres de

l'incertitude définit le nombre de chiffres à garder pour le résultat.

$$V = 9,989 \pm 0,021 \text{ cm}^3 \text{ à } 20^\circ\text{C}$$

avec $k=2,11$ et $\nu_{\text{eff}} = 17$

au niveau de confiance $NC=95\%$

Les longs et fastidieux calculs précédents sont instantanés avec *GUMic*

CONCLUSION

Les progrès apportés par la méthode du GUM

Résultat final plus fiable.

Meilleure connaissance du processus de mesure : on modélise finement ce processus particulier, bien concrètement.

D'où **possibilité de l'améliorer.**

Meilleure traçabilité et possibilité pour un tiers de critiquer le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

GUM : Guide to the expression of **U**ncertainty in **M**easurement (1993)

Version française : Norme Française X 07- 020 AFNOR Août 1999

VIM : **V**ocabulaire **I**nternational des termes fondamentaux et généraux de **M**étrie

Version française : Norme Française X 07- 001 AFNOR Décembre 1994

Métrie Cours A M.Lecollinet (1996-1997) CNAM MEDIA

Guide EURACHEM/CITAC

Quantifier l'Incertitude dans les Mesures Analytiques

(format pdf téléchargeable gratuitement)

<http://www.eurachem.ul.pt/>

<http://www.sach.ch/euchemf.html>

Techniques de l'Ingénieur Mesures et Contrôle R 285

Incertitudes de mesure et tolérances Marc Priel